

P O L S K A A K A D E M I A N A U K
M O N O G R A F I E M A T E M A T Y C Z N E

JAN MIKUSIŃSKI

KOMITET REDAKCYJNY

KAZIMIERZ KURATOWSKI REDAKTOR NACZELNY,
KAROL BORSUK, BRONISŁAW KNASTER, STANISŁAW MAZUR,
WACŁAW SIERPIŃSKI, HUGO STEINHAUS, WŁADYSŁAW ŚLEBODZIŃSKI

RACHUNEK OPERATORÓW

TOM XXX

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O M A T E M A T Y C Z N E

WARSZAWA 1953

02338

COPYRIGHT, 1953, by MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

WARSZAWA

(Poland)

Śniadeckich 8

All Rights Reserved

No part of this book may be translated or reproduced
in any form, by mimeograph or any other means,
without permission in writing from the publishers.



PRINTED IN POLAND

Polskie Towarzystwo Matematyczne — Warszawa

Nakład 2850

Stronic druku VIII-368

Papier druk. sat. kl. V 70×100, 80 g (16)

Druk rozpoczęto w październiku 1952

Druk ukończono w grudniu 1953

Zamówienie nr. 572/52 — M-3-23093

Krakowska Drukarnia Naukowa, Kraków, Czapskich 4

PRZEDMOWA

Rachunek operatorów był już znany w początkach XIX wieku, lecz rozpowszechnił się i rozwinął dopiero dzięki pracom Heaviside'a, który stosował go szeroko w zagadnieniach elektrotechniki.

W tej książce operatory są wprowadzone algebraicznie jako pewnego rodzaju ułamki. Stanowią one uogólnienie pojęcia liczby; działania na nich wykonuje się tak jak na liczbach. Ujęcie to jest prostsze i ogólniejsze od podawanego w innych książkach (w których wykład jest oparty na transformacji Laplace'a) i jest dostępne dla czytelników nie znających teorii funkcji analitycznych.

Książka stanowi pierwsze metodyczne opracowanie teorii, opublikowanej przez autora w latach 1950-1952, wraz z zastosowaniami. Jest napisana tak, żeby mógł z niej korzystać zarówno inżynier, dla którego rachunek operatorów jest tylko narzędziem pracy, jak i czytelnik, którego interesują dowody twierdzeń i zagadnienia matematyczne.

Dużą pomoc w przygotowaniu książki okazali mi Koledzy C. Ryll-Nardzewski, z którym pewne części tekstu szczegółowo przedyskutowałem, i M. Warmus, który przejrzał całość, opracował rozwiązania zadań, skontrolował i poprawił rachunki. Wiele cennych uwag zawdzięczam też Kolegom S. Drobotowi, S. Gładyszowi, A. Nowackiemu, H. Pidekównie i innym. Rysunki do książki wykonał z dużą starannością mgr S. Gutek. Pracownikom Działu Wydawnictw Polskiego Towarzystwa Matematycznego J. Panzowi i M. Malinowskiej zawdzięczam sumienne przeprowadzenie korekt technicznych i pewne poprawki językowe. Pragnę także wyrazić swą wdzięczność Komitetowi Redakcyjnemu Monografii Matematycznych za życzliwe ustosunkowanie się do mojej książki.

Wrocław, 10 lipca 1953 r.

Jan Mikusiński

Równoległe połączenie 62, 66.
 Różniczkowalna funkcja 122.
 Różniczkowanie szeregów funkcyjnych 199.
 Różniczkowe wyrażenie liniowe 265, -y operator 27.
 Rzędu wyższego pochodna ciągła 120.

Sinusoidalny prąd 51.
 Skrzyżowanie 75.
 Splot funkcji 1, -u łączność 3, -u przemienność 2.
 Sprzężenie indukcyjne 71.
 Struna drgająca 151, 318, — nieskończoność długa 161.
 Suma szeregu operatorów 141.
 Szereg funkcyjny jednostajnie zbieżny 184, — operatorów 141, — trygonometryczny 194, -ów funkcyjnych całkowanie 197, -ów funkcyjnych różniczkowanie 197, -ów liczbowych zbieżność 181, -u majoranta 183, -u operatorów suma 141, -u potęgowego pochodna 231, -u promień zbieżności 226.
 Szeregowe połączenie 64, 66.

Telegrafistów równanie 239.
 Thomsona kabel 241.
 Titchmarsha twierdzenie 10.
 Tłumienia współczynnik 246.
 Tony flażoletowe 168.
 Transformacja Laplace'a 327.
 Transformata 329.
 Transformator 84.
 Trygonometryczna funkcja 30, -y szereg 194.
 Typ paraboliczny 177.
 Twierdzenie Eulera 61, — Lercha 15, — o jednoznaczności 146, — o momentach 13, — o przedłużaniu rozwiązań 148, — Phragmèna 11, — Titchmarsha 10.

Układ elementarny 61.
 Uogólniona funkcja wykładnicza 124, 255.
 Uproszczona macierz transformatora 86.
 Ustalony prąd 51.

Vandermonde'a wyznacznik 264.

Wartość funkcji 6.
 Warunki brzegowe 174, 270, — Cauchy'ego 174, 293, — mieszane 174, — początkowe 270.
 Wheatstone'a mostek 55.
 Wielokrotny pierwiastek 257.
 Wielomian charakterystyczny 254, 267, — operatora s 29, -y Laguerre'a 88.
 Własności całki 309, 313.
 Współczynnik tłumienia 246, — zniekształcenia 246.
 Wykładnicza funkcja 30, — hiperboliczna 125, — paraboliczna 176, — uogólniona 124, 255.
 Wymierne wyrażenie operatora s 31.
 Wyrażenie różniczkowe liniowe 265, — wymierne operatora s 31.
 Wyznacznik Vandermonde'a 264.
 Wyższego rzędu pochodna ciągła 120.
 Wzory Eulera 202.
 Wzór Cauchy'ego 9.

Zagadnienie brzegowe 94, 213, — brzegowe uogólnione 213, — mieszane 174.
 Zawada 53.
 Zbieżność jednostajna ciągu funkcji 130, — jednostajna szeregów funkcyjnych 184, — szeregów liczbowych 181, -ci szeregu promień 226.
 Zniekształcenia współczynnik 246.
 Zwarcia prąd 46, 62.
 Zwyczajne równanie różniczkowe 36.

TREŚĆ

CZĘŚĆ PIERWSZA. ALGEBRA OPERATORÓW.

ROZDZIAŁ I. Pojęcie i własności splotu funkcji ciągłych.

	Str.
§ 1. Definicja splotu	1
§ 2. Klasa C	2
§ 3. Przemienność splotu	2
§ 4. Łączność splotu	3
§ 5. Dodawanie i splot jako podstawowe działania w rachunku operatorów	4
§ 6. Funkcja a wartość funkcji	5
§ 7. Symbolika	7
§ 8. Operator całkowity	8

ROZDZIAŁ II. Twierdzenie Titchmarsha.

§ 9. Sformułowanie twierdzenia i ogólne uwagi	10
§ 10. Twierdzenie Phragmèna	11
§ 11. Twierdzenie o momentach	13
§ 12. Dowód twierdzenia Titchmarsha w przypadku $f=g$	15
§ 13. Dowód ogólny	18

ROZDZIAŁ III. Operatory.

§ 14. Działanie odwrotne do splotu	20
§ 15. Operatory	21
§ 16. Działania na operatorach	22
§ 17. Operatory liczbowe	23
§ 18. Uwagi terminologiczne	23
§ 19. Iloczyn liczby i funkcji	25
§ 20. Liczby 0 i 1	26
§ 21. Operator różniczkowy	27
§ 22. Potęgi operatora s	28
§ 23. Wielomiany operatora s	29
§ 24. Związki operatora s z funkcją wykładniczą	30
§ 25. Związki operatora s z funkcjami trygonometrycznymi	30
§ 26. Wyrażenia wymierne operatora s	31

ROZDZIAŁ IV. Równania różniczkowe zwyczajne o współczynnikach stałych.

§ 27. Ogólna metoda i przykłady	36
---	----

ROZDZIAŁ V. Teoria obwodów elektrycznych.

	Str.
§ 28. Uwagi dotyczące stosowania rachunku operatorów do zagadnień fizyki i techniki	42
§ 29. Obwód elektryczny	44
§ 30. Zerowe warunki początkowe	45
§ 31. Prąd zwarcia	46
§ 32. Impedancja	50
§ 33. Prądy sinusoidalne	51
§ 34. Prawa Kirchhoffa	55
§ 35. Mostek Wheatstone'a	55
§ 36. Mostek Andersona	57
§ 37. Ogólne uwagi o układzie równań dla prądów sieci	58
§ 38. Impedancja i prąd zwarcia układów złożonych	61
§ 39. Przypadek siły elektromotorycznej sinusoidalnej	67
§ 40. Impuls napięcia i jego zastosowanie przy pomiarach impedancji	69
§ 41. Sprzężenia indukcyjne	71
§ 42. Czwórnik	74
§ 43. Łączenie czwórników	77
§ 44. Połączenia trzech czwórników	79
§ 45. Czwórnik ze zwartymi przewodami końcowymi	81
§ 46. Czwórnik z wolnymi przewodami końcowymi	83
§ 47. Transformatory	84
§ 48. Lampa katodowa jako czwórnik	86

ROZDZIAŁ VI. Ogólne rozwiązania równań różniczkowych i zagadnienia brzegowe.

§ 49. Rozwiązanie ogólne	90
§ 50. Zagadnienia brzegowe	94
§ 51. Rozwiązywanie równań różniczkowych przy danych warunkach początkowych w punkcie $t_0 \neq 0$	96

ROZDZIAŁ VII. Funkcje nieciągłe.

§ 52. Funkcje klasy \mathcal{K}	98
§ 53. Działania na funkcjach klasy \mathcal{K}	99
§ 54. Całka gamma Eulera	102
§ 55. Niecałkowite potęgi operatorów l i $s-a$	104
§ 56. Funkcje, mające pochodną klasy \mathcal{K}	107
§ 57. Równania różniczkowe z nieciągłą prawą stroną	108

CZĘŚĆ DRUGA. RACHUNEK RÓŻNICZKOWY OPERATORÓW.
ROZDZIAŁ I. Funkcje operatorowe i ich pochodne.

§ 1. Funkcje operatorowe	110
§ 2. Ciągłość funkcji operatorowej	111
§ 3. Pochodna ciągła funkcji operatorowej	115
§ 4. Własność pochodnej ciągłej	117
§ 5. Pochodne ciągłe rzędów wyższych	120
§ 6. Pochodna ciągła w przedziale nieskończonym	121
§ 7. Ogólna definicja pochodnej	122

ROZDZIAŁ II. Funkcje wykładnicze.

§ 8. Równanie różniczkowe $x'(\lambda) = wx(\lambda)$	123
§ 9. Uogólnione funkcje wykładnicze	124
§ 10. Operatory przesunięcia	125

ROZDZIAŁ III. Ciągi i szeregi operatorów.

§ 11. Jednostajna zbieżność	130
§ 12. Granica ciągu operatorów	133
§ 13. Fizyczne interpretacje operatora przesunięcia	136
§ 14. Własności granicy ciągu operatorów	138
§ 15. Szeregi operatorów	141

ROZDZIAŁ IV. Równanie różniczkowe $x''(\lambda) = wx(\lambda)$.

§ 16. Twierdzenie o jednoznaczności	146
§ 17. Przedłużanie rozwiązań	147

ROZDZIAŁ V. Drgania struny.

§ 18. Równanie operatorowe struny drgającej	151
§ 19. Kształt struny drgającej	154
§ 20. Ogólniejsze warunki brzegowe	159
§ 21. Jednoznaczność rozwiązania	160
§ 22. Nieskończenie długa struna	161
§ 23. Struna w polu grawitacyjnym	163
§ 24. Drgania struny przy pewnych szczególnych położeniach początkowych	166
§ 25. Drgania struny przy dowolnie zadanym położeniu początkowym	169
§ 26. Drgania struny przy zadanej prędkości początkowej	173
§ 27. Inne interpretacje	173
§ 28. Ogólne uwagi o zagadnieniu brzegowym	174

ROZDZIAŁ VI. Równanie ciepła.

§ 29. Funkcja wykładnicza paraboliczna	176
§ 30. Niektóre analityczne własności funkcji wykładniczej parabolicznej	178
§ 31. Temperatura pręta przewodzącego ciepło	179
§ 32. O zbieżności szeregów liczbowych	181
§ 33. Kryterium majoranty	183
§ 34. O jednostajnej zbieżności szeregów funkcyjnych	184
§ 35. Rozwinięcie rozwiązania w szereg nieskończony	186
§ 36. Nierówności i moduł	187
§ 37. Nieskończenie długi pręt	189
§ 38. Pręt bez dopływu ciepła	193
§ 39. Szeregi trygonometryczne	194
§ 40. Całkowanie i różniczkowanie szeregów funkcyjnych	197
§ 41. Zmiany temperatury w pręcie przy danej temperaturze początkowej	203
§ 42. Sprawdzenie poprawności rozwiązania	205
§ 43. Pewne przypadki szczególne	207
§ 44. Pręt jednostronnie izolowany	208
§ 45. Jednostronnie regulowany dopływ ciepła	211
§ 46. Ogólniejsze zagadnienia brzegowe	213

§ 47. Pierścień przewodzący ciepło	217
§ 48. Operacja T^α i jej zastosowanie	219
§ 49. Nieizolowany przewodnik ciepła	223

ROZDZIAŁ VII. Funkcje Bessela.

§ 50. Szeregi potęgowe operatorów	226
§ 51. Funkcje Bessela $J_0(t)$ i $J_1(t)$	229
§ 52. Pochodne szeregów potęgowych	231
§ 53. Funkcje Bessela $J_n(t)$ przy dowolnym n naturalnym	233
§ 54. Funkcja $\exp \lambda(s - \sqrt{s^2 + a^2})$ i jej pokrewne	234

ROZDZIAŁ VIII. Równanie telegrafistów.

§ 55. Ogólna postać równania telegrafistów	233
§ 56. Przewodnictwo bez strat	239
§ 57. Przewodnictwo bez zniekształcenia	240
§ 58. Kabel Thomсона	241
§ 59. Kabel bez samoindukcji	242
§ 60. Kabel bez upływności	243
§ 61. Przypadek, gdy wszystkie cztery parametry przewodnictwa są dodatnie	245

ROZDZIAŁ IX. Pochodna algebraiczna.

§ 62. Definicja i własności	247
§ 63. Potęgi operatora $\frac{1}{s^2 + \beta^2}$	250

CZĘŚĆ TRZECIA. SZKIC OGÓLNEJ TEORII RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH LINIOWYCH O WSPÓŁCZYNNIKACH STAŁYCH.

ROZDZIAŁ I. Równania jednorodne.

§ 1. Uwagi wstępne	253
§ 2. Równania charakterystyczne	254
§ 3. O funkcjach wykładniczych	255
§ 4. Logarytmy	256
§ 5. Wielokrotne pierwiastki równania charakterystycznego	257
§ 6. Rozwiązanie ogólne	259
§ 7. Twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań	261
§ 8. Równanie logarytmiczne	264
§ 9. Wyrażenia różniczkowe liniowe	265
§ 10. Działania na wyrażeniach różniczkowych liniowych	266
§ 11. Wielomiany charakterystyczne wyrażeń różniczkowych liniowych	267
§ 12. Równania czyste	267
§ 13. Równania mieszane	268
§ 14. Dostosowanie rozwiązania do danych warunków początkowych, brzegowych i innych	269

ROZDZIAŁ II. Równania niejednorodne.

§ 15. Ogólne rozwiązanie równania niejednorodnego	272
§ 16. Przypadek, gdy prawa strona jest wielomianem	273

§ 17. Przypadek, gdy prawa strona jest funkcją wykładniczą	275
§ 18. Przypadek, gdy prawa strona jest iloczynem wielomianu i funkcji wykładniczej	276
§ 19. Przypadek, gdy prawa strona jest kombinacją liniową dwóch funkcji	277
§ 20. Przypadek, gdy prawa strona jest funkcją trygonometryczną	278
§ 21. Dostosowanie rozwiązania do warunków dodatkowych	279

ROZDZIAŁ III. Zastosowanie do równań różniczkowych cząstkowych.

§ 22. Sprowadzanie równań różniczkowych cząstkowych do równań operatorowych	282
§ 23. Uwagi o warunkach dodatkowych	288
§ 24. Błędne rozwiązanie	289
§ 25. Wyjaśnienie pozornej sprzeczności	291
§ 26. Warunki Cauchy'ego i kwestia ich równoważności z warunkami ogólnymi	293
§ 27. Rozwiązanie równań rostryktywnych	295
§ 28. Kwestia równoważności równania cząstkowego i równania operatorowego	297
§ 29. Dalsze przykłady rozwiązywania równań cząstkowych	299
§ 30. Ogólne uwagi o rozwiązywaniu równań cząstkowych metodą operatorów	302

CZĘŚĆ CZWARTA. RACHUNEK CAŁKOWY OPERATORÓW.

ROZDZIAŁ I. Całka funkcji operatorowej i jej zastosowania.

§ 1. Funkcje operatorowe klasy (\mathcal{K})	306
§ 2. Definicja całki	307
§ 3. Własności całki	309
§ 4. Funkcje operatorowe dwóch zmiennych	312
§ 5. Obcinanie funkcji	313
§ 6. Postać całkowa pewnego rozwiązania szczególnego równania różniczkowego logarytmicznego	316
§ 7. Zastosowanie do równania struny drgającej	318
§ 8. Zastosowanie szeregów nieskończonych i całek oznaczonych	322

ROZDZIAŁ II. Transformacje całkowe.

§ 9. Transformacja Laplace'a	326
§ 10. Transformacja Laplace'a jako podstawa rachunku operatorów	327
§ 11. Porównanie metody bezpośredniej i metody transformacji Laplace'a	329
§ 12. Inne metody pokrewne	330

CZĘŚĆ PIĄTA. WZORY I TABLICE.

I. Funkcje specjalne.

1. Funkcja gamma Eulera	331
2. Funkcja błędu	331
3. Funkcje Bessela	331

II. Wzory z rachunku operatorów	Str. 332
III. Zastosowania elektrotechniczne.	
1. Równanie obwodu elektrycznego	336
2. Prąd trwały (stacjonarny).	336
3. Tabela prostych czwórników i ich macierzy	337
IV. Tablice funkcji.	
1. Funkcja gamma Eulera $\Gamma(\lambda)$	338
2. Funkcja błędu erf (λ)	338
3. Funkcja Bessela $J_0(\lambda)$	339
4. Funkcja Bessela $J_1(\lambda)$	339
5. Funkcje $J_0(i\lambda)$ i $-iJ_1(i\lambda)$	340
LITERATURA	342
ODPOWIEDZI DO ĆWICZEŃ	343
SKOROWIDZ NAZW	360



J. MIKUSIŃSKI
RACHUNEK OPERATORÓW

ERRATA

Stronica i wiersz:	jest:	powinno być:
Przedmowa ₁₀	A. Nowackiemu	P. Nowackiemu
82 ₅	$-\omega i$	ωi
82 ₄	$-3RC\omega i$	$+3RC\omega i$
82 ₁	$\varphi + \arctg \frac{3RC\omega}{R^2C^2\omega^2 - 1} -$ $-\arctg \frac{4RC\omega}{R^2C^2\omega^2 - 3}$	$\varphi - \arctg \frac{3RC\omega}{R^2C^2\omega^2 - 1} +$ $+\arctg \frac{4RC\omega}{R^2C^2\omega^2 - 3}$
83 ^a	$\varphi - \arctg \frac{4RC\omega}{R^2C^2\omega^2 - 3}$	$\varphi + \arctg \frac{4RC\omega}{R^2C^2\omega^2 - 3}$
84 ^a	$\varphi - \arctg \frac{4RC\omega}{R^2C^2\omega^2 - 3}$	$\varphi + \arctg \frac{4RC\omega}{R^2C^2\omega^2 - 3}$
326 ^a	paragrafuy mieliśm	paragrafu mieliśmy
Ponadto		
157	Na rys. 107 punkt przecięcia grubej linii z osią t powinien być oznaczony literą t_0 .	
196	Na rys. 128 punkt na osi pionowej oznaczony cyfrą 1 powinien być oznaczony literą π . Ponadto linie grube ukośne powinny być nachylone do osi poziomej pod kątem 45° i odpowiednio powinny być rozsunięte poziome linie przerywane.	
339	W całej pierwszej kolumnie strony powinien być dopisany po każdej liczbie przecinek dziesiętny.	
339 ₂	po $+015$ w dwóch ostatnich kolumnach dopisać jeszcze $+033$ $+050$	